第19講　2曲線と面積

PART1　曲線と接線の間の面積

1　[1]　放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x+7$，および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

[2]　曲線 $y=x^3-4x$ とその曲線上の点 $(1,\ -3)$ における接線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

Point Pickup

区間 $a \leqq x \leqq b$ において，常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれる部分の面積 S は $S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$ を利用して面積を求める。

2曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が $x=\alpha$ で接するとき，方程式 $f(x)-g(x)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもち，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^2$ を因数にもつ。

C が定数のとき

$$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C \qquad \text{とくに} \qquad \int (x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$

が利用できるとよい。

第19講　PART1　確認問題

1 放物線 $y=x^2-2x+1$ と直線 $y=-4x$, および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

2 曲線 $y=-2x^3+6x^2+6x-11$ とその曲線上の点$(2,\ 9)$における接線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

第19講 2 曲線と面積

PART1 曲線と接線の間の面積

1 ［1］ 放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x+7$，および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

［2］ 曲線 $y=x^3-4x$ とその曲線上の点 $(1,\ -3)$ における接線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

［1］ 放物線 $y=-x^2+2x+3$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$-x^2+2x+3=0 \qquad (x+1)(x-3)=0 \qquad x=-1,\ 3$$

直線 $y=-2x+7$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$-2x+7=0 \qquad x=\frac{7}{2}$$

放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x+7$ の共有点の x 座標は

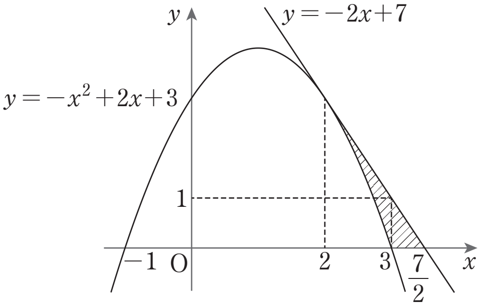
$$-x^2+2x+3=-2x+7$$

より

$$x^2-4x+4=0 \qquad (x-2)^2=0 \qquad x=2$$

よって，$x=2$ において接する。

右図より，求める面積は



$$\int_2^3\{(-2x+7)-(-x^2+2x+3)\}dx$$

$$+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx$$

$$=\int_2^3(x^2-4x+4)dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_2^3+\left[-x^2+7x\right]_3^{\frac{7}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}(27-8)-2(9-4)+4(3-2)-\left(\frac{49}{4}-9\right)+7\left(\frac{7}{2}-3\right)=\frac{7}{12}$$

（面積を求める計算の別解）

$$\int_2^3\left\{(-2x+7)-\left(-x^2+2x+3\right)\right\}dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)\,dx$$

$$=\int_2^3(x-2)^2\,dx+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{2}-3\right)\cdot 1=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^3+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

[2]　$y'=3x^2-4$ より，$x=1$ のとき $y'=-1$

よって，点 $(1,\ -3)$ における接線の方程式は

$y=-(x-1)-3$　すなわち　$y=-x-2$

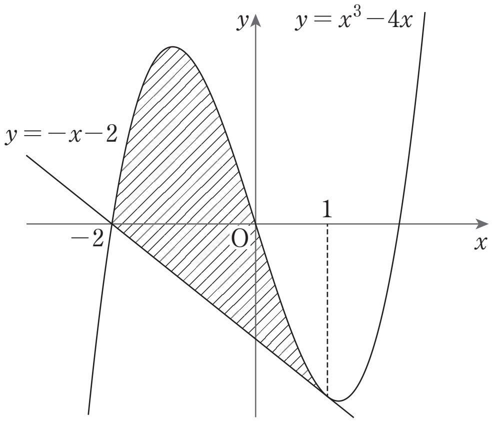
この接線と曲線の共有点の x 座標は

$x^3-4x=-x-2$

より

$x^3-3x+2=0$　　　$(x-1)^2(x+2)=0$

$x=1,\ -2$



右図より，求める面積は

$$\int_{-2}^1\left\{\left(x^3-4x\right)-(-x-2)\right\}dx=\int_{-2}^1\left(x^3-3x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1$$

$$=\frac{1}{4}(1-16)-\frac{3}{2}(1-4)+2(1+2)=\frac{27}{4}$$

（面積を求める計算の別解）

$$\int_{-2}^1\left\{\left(x^3-4x\right)-(-x-2)\right\}dx$$

$$=\int_{-2}^1(x-1)^2(x+2)dx=\int_{-2}^1(x-1)^2\{(x-1)+3\}dx$$

$$=\int_{-2}^1\left\{(x-1)^3+3(x-1)^2\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^1=-\frac{81}{4}+27=\frac{27}{4}$$

第19講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3

[解説]

放物線 $y=x^2-2x+1$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0$$

よって　$x=1$

直線 $y=-4x$ と x 軸の共有点の x 座標は　$x=0$

放物線 $y=x^2-2x+1$ と直線 $y=-4x$ の共有点の x 座標は

$$x^2-2x+1=-4x$$

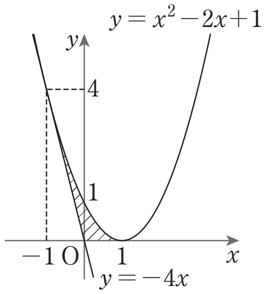
より

$$x^2+2x+1=0$$

$$(x+1)^2=0 \quad \text{[A]}$$

よって　$x=-1$

ゆえに，$x=-1$ の点で接する。



右図より，求める面積は

$$\int_{-1}^{0}\{(x^2-2x+1)-(-4x)\}dx \quad \text{[B]}$$

$$+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}-1+1+\frac{1}{3}-1+1$$

$$=\frac{2}{3}$$

[A]　2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，$x=\alpha$ の点で接するとき，方程式 $f(x)-g(x)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもち，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^2$ を因数にもつ。

[B]　区間 $a\leqq x\leqq b$ において，つねに $f(x)\geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx$$

（面積を求める計算の別解）

$$\int_{-1}^{0}\{(x^2-2x+1)-(-4x)\}dx$$

$$+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2-2x+1)dx-\int_{-1}^{0}(-4x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x-1)^2dx-\frac{1}{2}\cdot\{0-(-1)\}\cdot 4$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{-1}^{1}-2$$ [C]

$$=\frac{8}{3}-2=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

[C]　積分の公式

$$\int(x-\alpha)^2dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$

（C は定数）

2 [正解] ウエ：27，オ：2

[解説]

$y'=-6x^2+12x+6$ より，$x=2$ のとき　$y'=6$

よって，点 $(2,\ 9)$ における接線の方程式は

$$y=6(x-2)+9$$ [D]

すなわち　$y=6x-3$

この接線と曲線の共有点の x 座標は

$$-2x^3+6x^2+6x-11=6x-3$$

より

$$x^3-3x^2+4=0$$

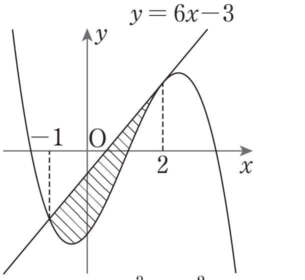
$$(x-2)^2(x+1)=0$$

よって

$$x=2,\ -1$$ [A]

[D]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$



右図より，求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\{(6x-3)-(-2x^3+6x^2+6x-11)\}dx$$ [B]

$$=\int_{-1}^{2}(2x^3-6x^2+8)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-2x^3+8x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}(16-1)-2(8+1)+8(2+1)$$

$$=\mathbf{\frac{27}{2}}$$

（面積を求める計算の別解）

$$\int_{-1}^{2}\left\{(6x-3)-\left(-2x^3+6x^2+6x-11\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}2(x-2)^2(x+1)dx$$

$$=2\int_{-1}^{2}(x-2)^2\{(x-2)+3\}dx$$

$$=2\int_{-1}^{2}\left\{(x-2)^3+3(x-2)^2\right\}dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}(x-2)^4+(x-2)^3\right]_{-1}^{2}$$ [E]

$$=2\left(-\frac{81}{4}+27\right)$$

$$=\mathbf{\frac{27}{2}}$$

[E]　積分の公式

$$\int(ax+b)^n dx$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$$

（C は定数）